

Problem K: Cat Numbers!

問題作成：安達
解法作成：安達・高橋・前原
解説：安達

問題概要

- A, B二つの1以上の自然数の桁数が与えられる
- AからBまでの数の和が、`strcat(A, B)` に等しいものをすべて求めよ
 - 一つもない場合は `No cats.` と出力
- A, Bの桁数は16桁以下
- 例
 - $1+2+3+4+5 = 15$
 - $2+3+4+5+6+7 = 27$
 - $7+8+9+\dots+117+118+119 = 7119$

まず数式を立ててみる

- AからBまでの和 = $(A+B)(B-A+1)/2$
- AとBをつなげたもの = $A*10^b + B$
 - bはBの桁数
- これらが等しいので
 - $B^2 - B - (A^2 + 2*A*10^b - A) = 0$

だめな解法

- 問題文中にあるとおり、AまたはBを固定すると二次方程式を解くだけの問題になる
- Aを固定して、条件を満たすBがあるかチェック
- 16桁の数は 9×10^{15} 個ある
 - Time Limit Exceeded

想定解法

- 「AとBの式の積 = 定数」の形にする
 - 右辺を整数の積に分解
 - 連立方程式を解く
- さっきの式を変形すると
$$(A-B+10^b)(A+B+10^b-1) = 10^b(10^b-1)$$
- 10^b-1 の約数を探す問題になった
 - 10^b の約数は自明
- 約数の数はそんなに多くない
 - cf. 高度合成数

Nの約数の列挙

- ×Nまでの数で割ってみる
- ΔN の平方根までの数で割ってみる
 - ▣ $\text{sqrt}(10^{16}) = 100\text{M回}$ → かなり厳しい
- ◎Nを素因数分解してから全可能性を列挙
 - ▣ 素因数を見つけるごとにNを割っていけば
 $O(\max(p_{n-1}, \text{sqrt}(p_n)))$
 - p_{n-1} は二番目に大きい素因数、 p_n は一番大きい素因数
 - $10^{16}-1 = (10^4-1)(10^4+1)(10^8+1) \rightarrow p_{n-1} \leq 10^4+1,$
 $p_n \leq 10^8+1$
 - $b=14, 15$ も同様
 - ▣ factorコマンドの結果を埋め込み

オーバーフローに注意

- $10^{16} (10^{16}-1)$ は64bit整数型に収まらない
 - もちろん約数も収まらない
- 約数を計算する際に上限を設ける
- 拡張倍精度浮動小数点数を使う
 - mantissaが64bitあるので精度も問題なし
- BigInteger

結果

- 総提出数：30
- 提出者数：11
- 正解者数：3
- 最初の正解者：片岡俊基さん(202分)
 - (オープン参加 吉田悠一さん(129分))