

J: きたたまさの逆襲

原案: wata

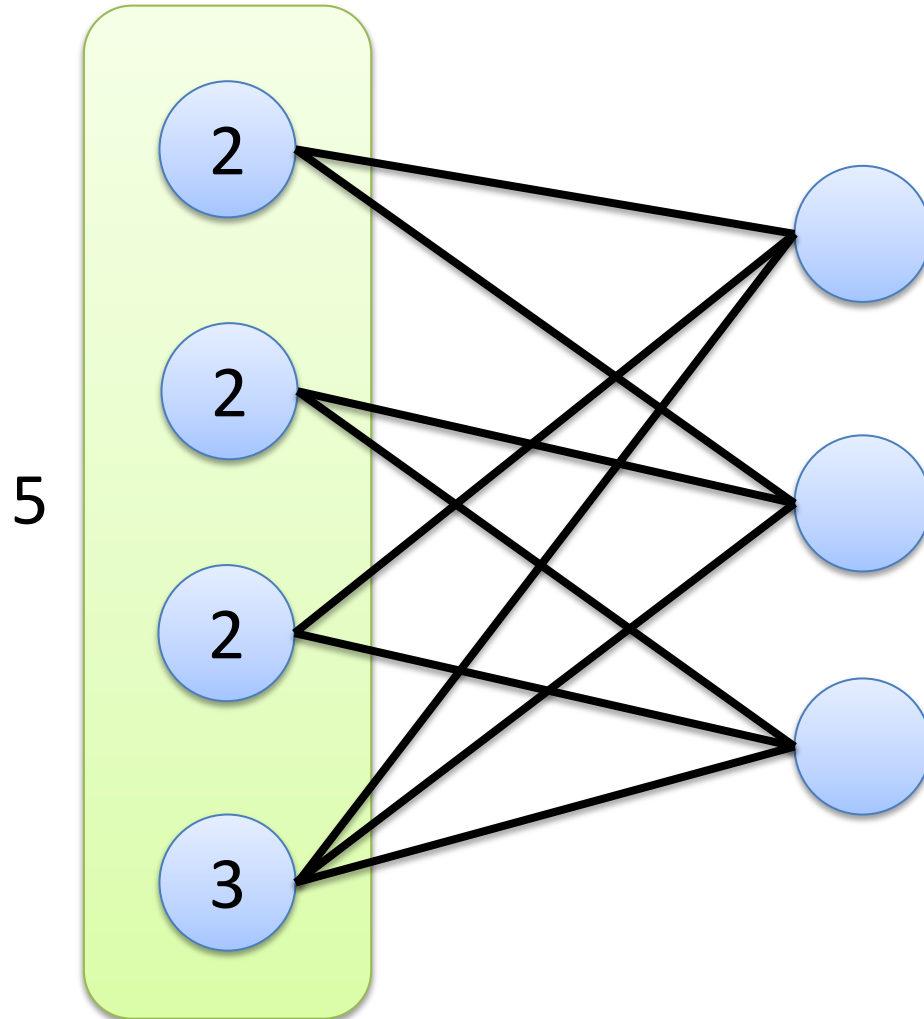
解答: wata, ogiekako

解説: wata

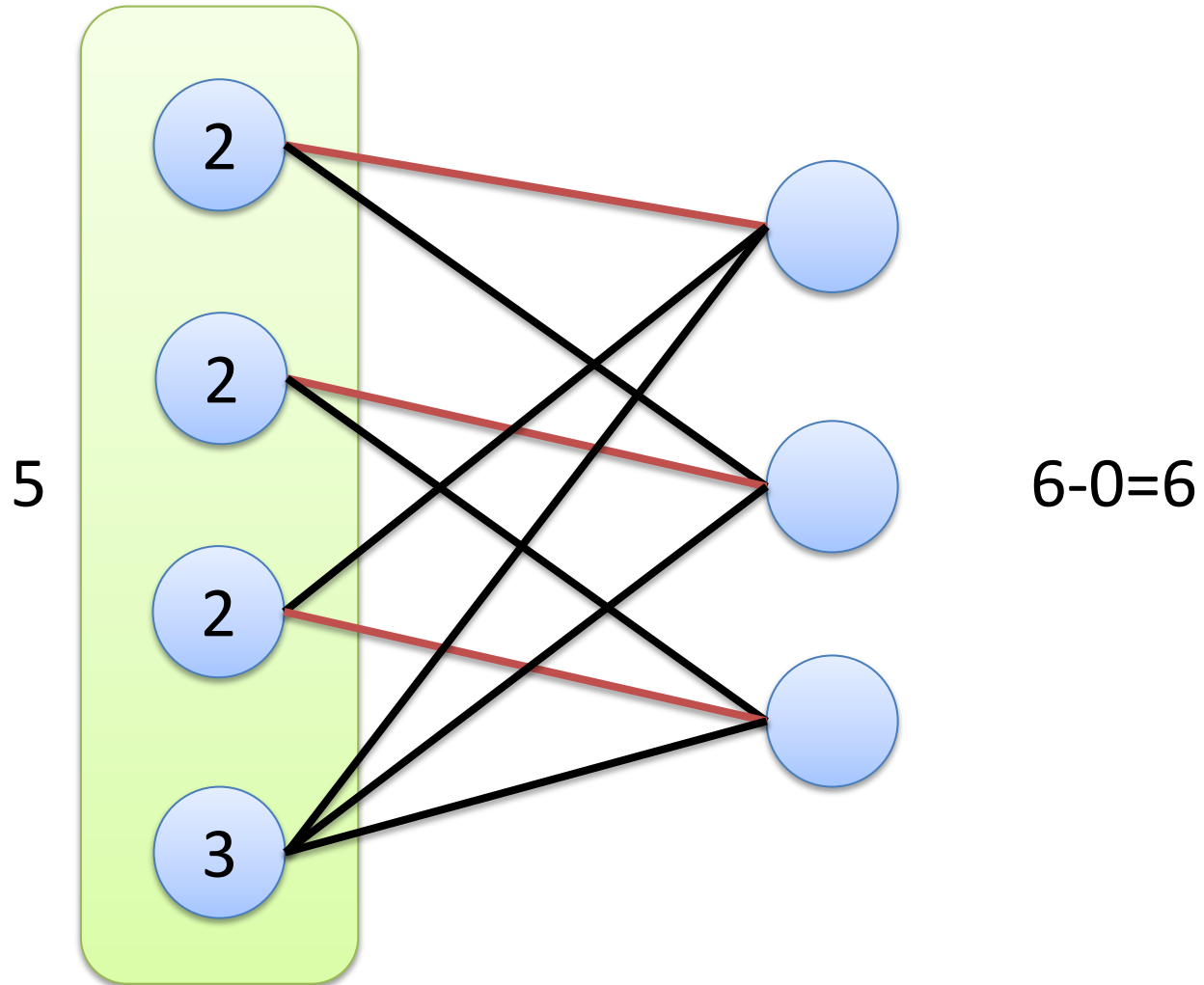
問題概要

- n 個の宝箱を開ける m 種類の鍵が、 d 個のお店で売られている
- 秋葉さんは全ての宝箱を全て開けるために最小コストで鍵を買いたい
- きたまささんはお店を買収して鍵の値段を釣り上げることができる
- 秋葉さんの費用ーきたまささんの費用を最大化せよ

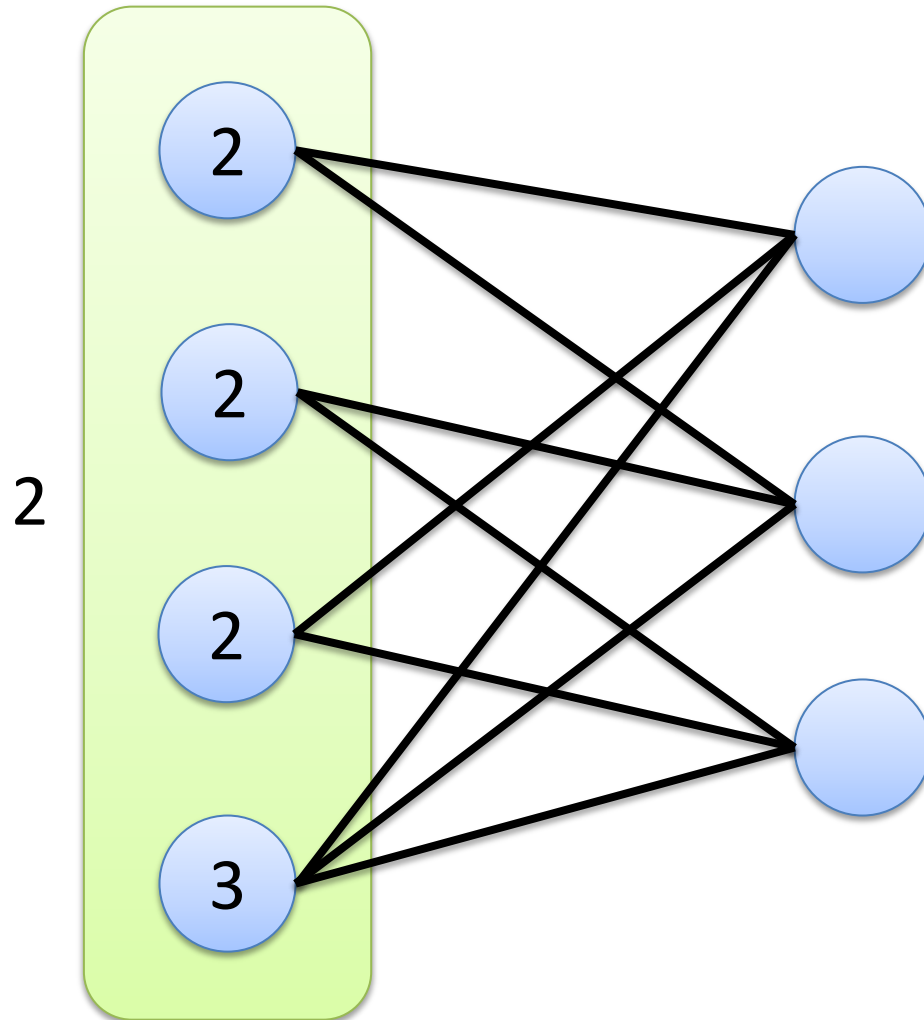
例1



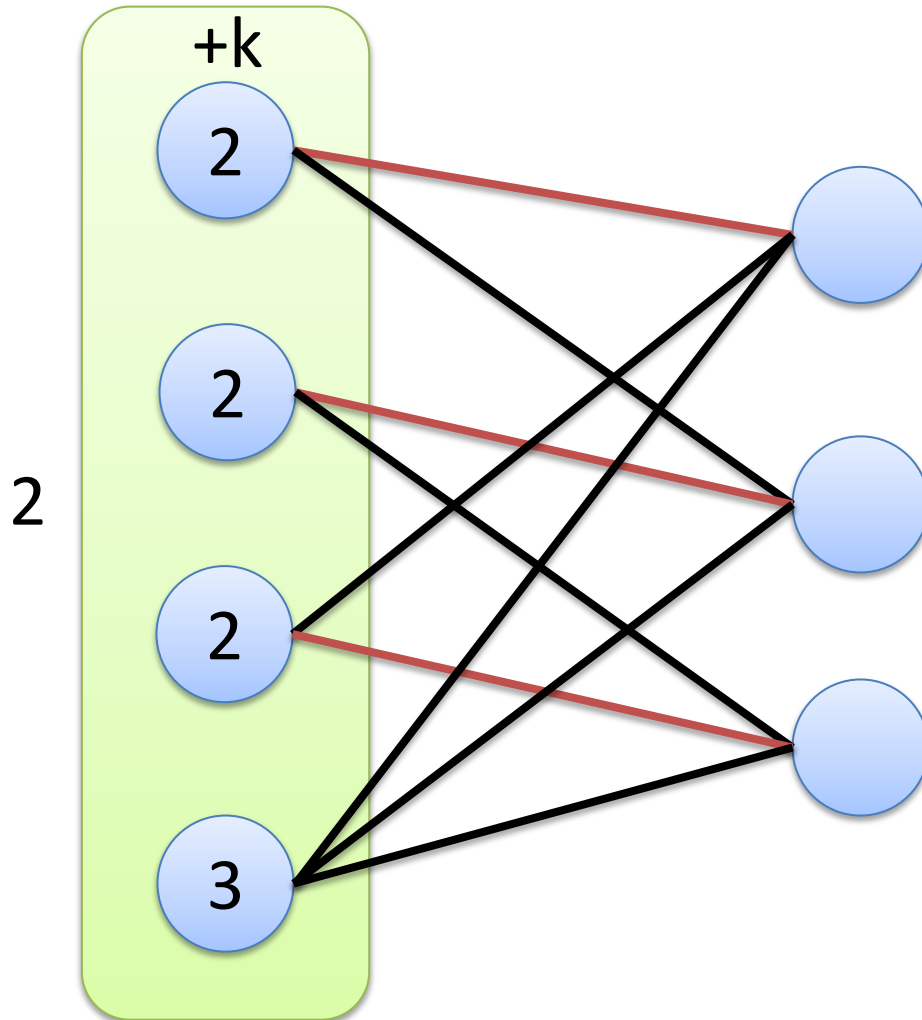
例1



例2

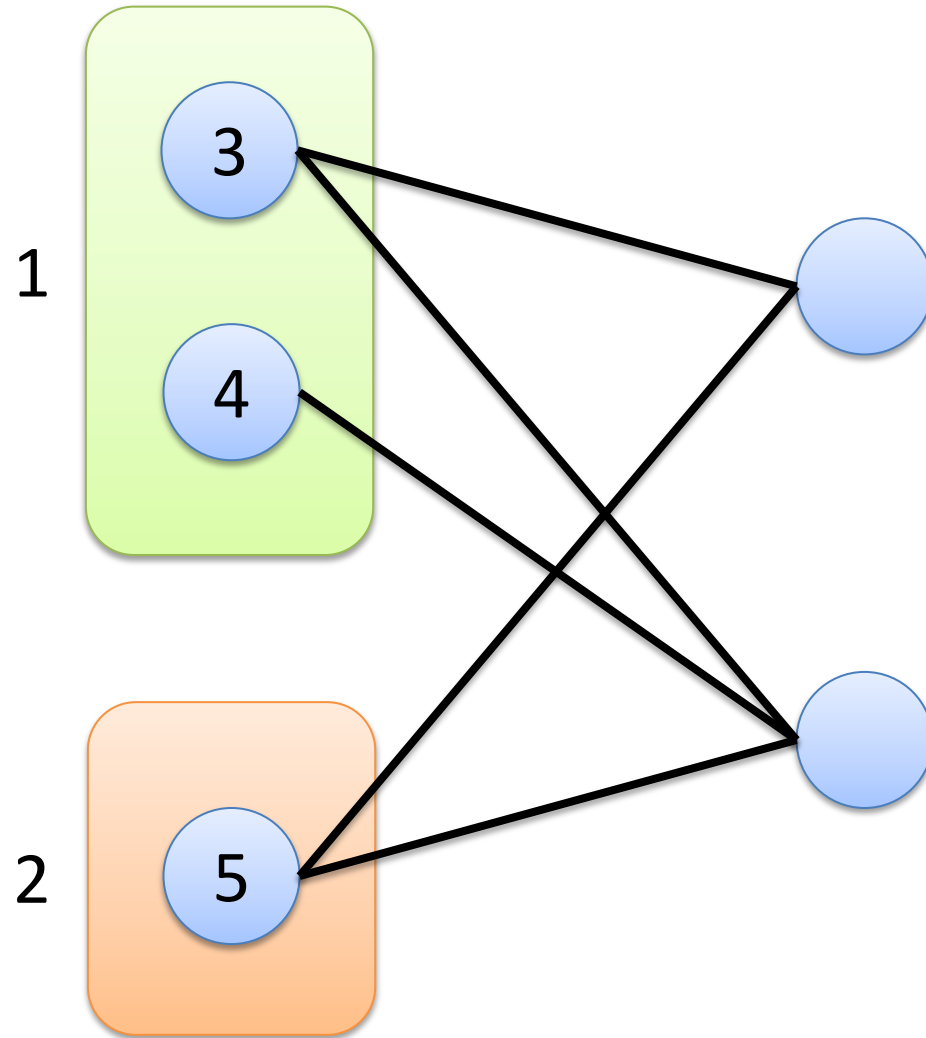


例2

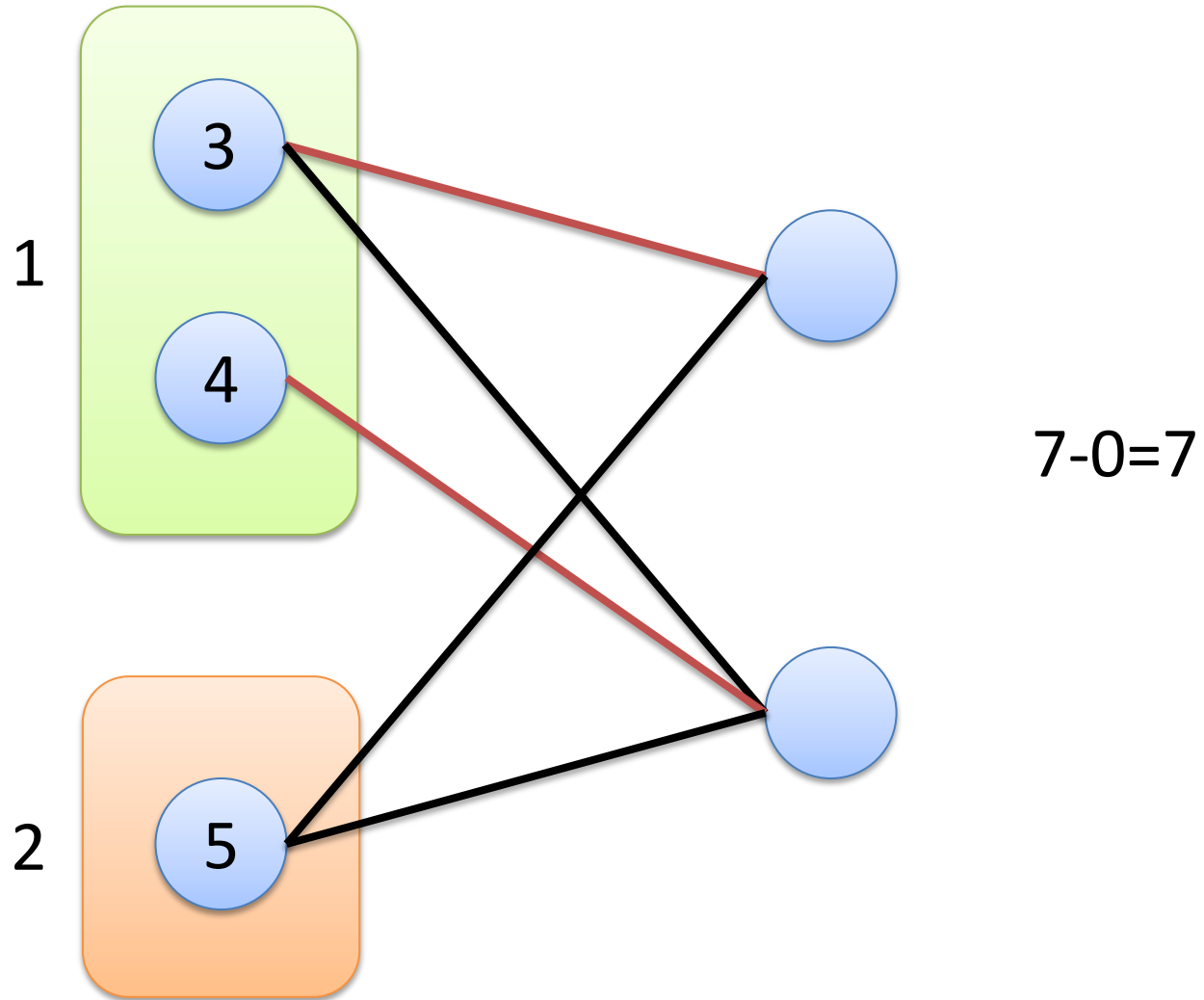


$6+3k-2k=6+k$
無限に大きくなる

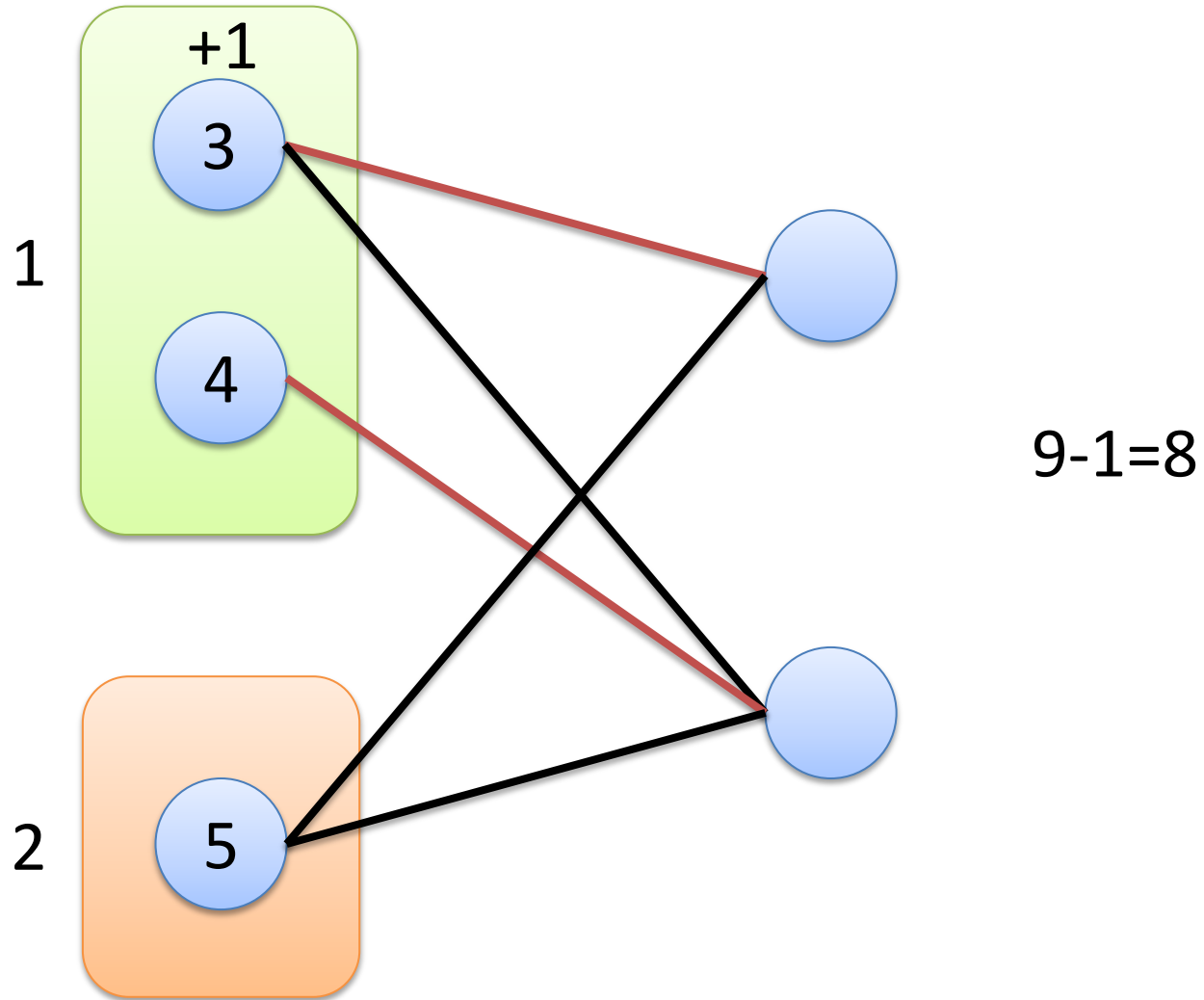
例3



例3



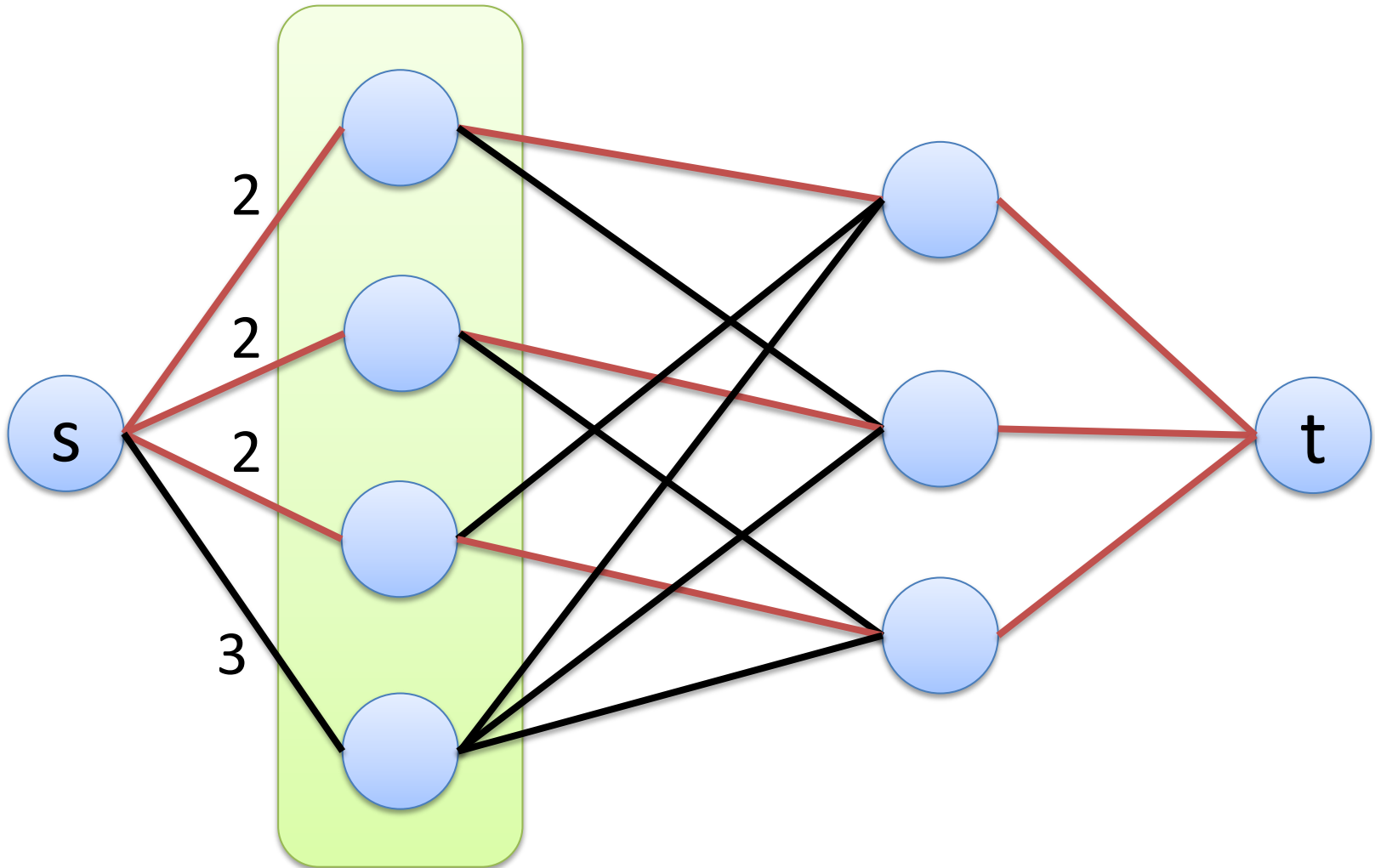
例3



部分点: $d = 1$

- 一円釣り上げるコストが b 円するとき, k 円釣り上げると答えが $kn - kb$ 変化するので, $n > b$ であれば無限に大きくでき, $n \leq b$ なら釣り上げる必要がない
- 釣り上げない場合, ただの最小費用マッチングなので簡単

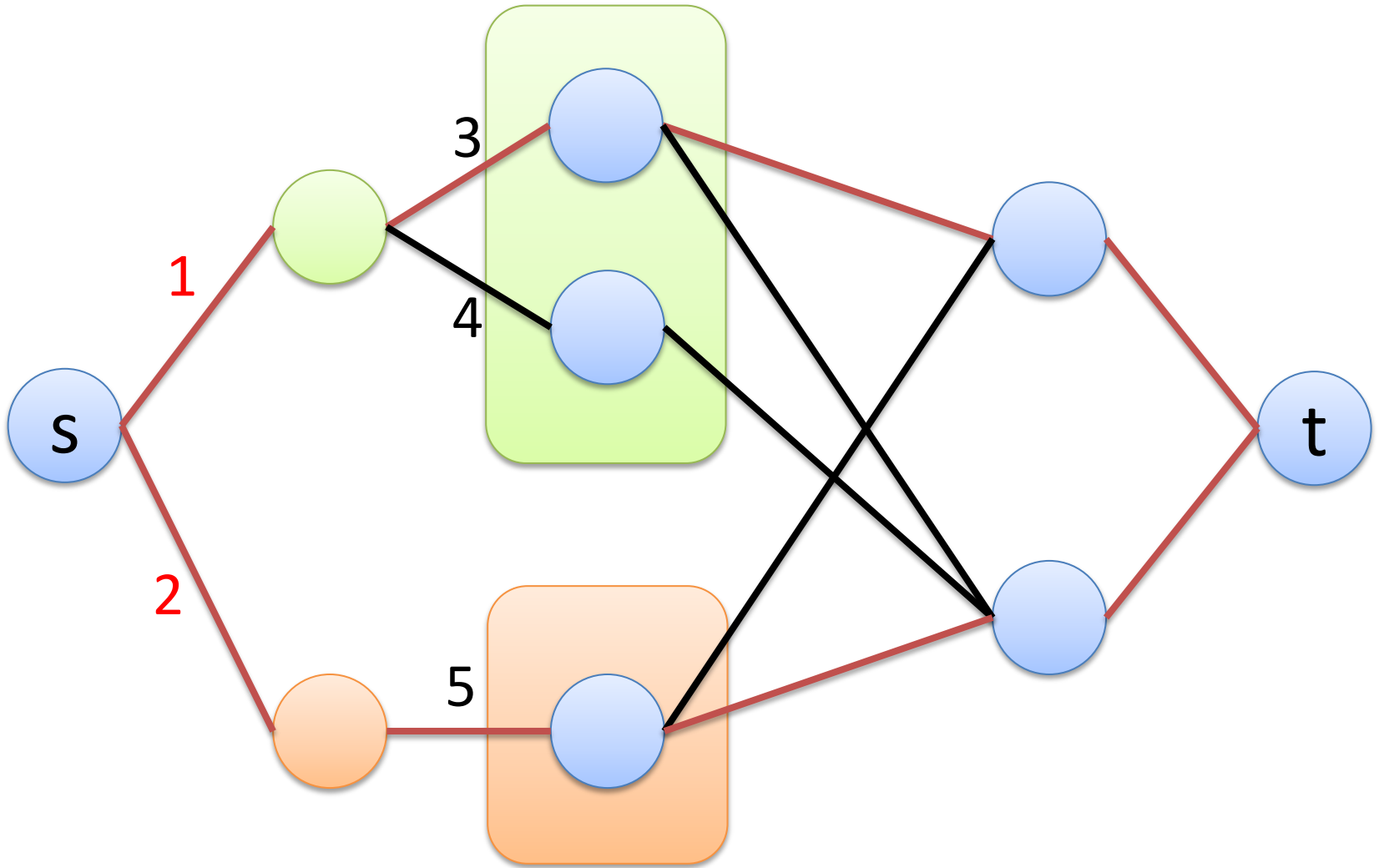
例1



想定解法

- 実は、さっきのグラフをちょっといじると最小費用流で解ける
- 考察
 - 同じ店 i から b_i 個より多く買うと、その店の値段を釣り上げて妨害される
 - 各店 i から b_i 個以下しか買わなければ、絶対に妨害されない
 - 実はそのような買い方における最小コストが答え

例3



証明

釣り上げ量を $\lambda_i \geq 0$, 秋葉さんが鍵 i を買うかを $f_i \in \{0,1\}$ とする

$$\max_{\lambda} \min_{f:\text{matching}} \sum_i (c_i + \lambda_i) f_i - \sum_i b_i \lambda_i$$

整理すると,

$$\max_{\lambda} \min_{f:\text{matching}} \sum_i c_i f_i + \sum_i \left(\sum_{j:S_j=i} f_j - b_i \right) \lambda_i$$

証明

$$\max_{\lambda} \min_{f:\text{matching}} \sum_i c_i f_i + \sum_i \left(\sum_{j:s_j=i} f_j - b_i \right) \lambda_i$$

$\lambda_i \geq 0$ を使って制約 $\sum_{j:s_j=i} f_j \leq b_i$ をラグランジュ緩和したように見えるので元の問題に戻す

$$\min_{f:\text{matching}, \sum_{j:s_j=i} f_j \leq b_i} \sum_i c_i f_i$$

これはどうみても最小費用流

提出状況

- Total AC
 - 5
- First AC
 - UnagiTaberuPerorinCoders (83:45)