問題 F
全域木

原案: 秋葉
解答: 秋葉, 北川
解説: 北川

問題概要

- N 頂点の完全グラフから、辺を共有しない全域木を K 個作成する
- K 個作れないときは -1

全域木は何個作れるか？

- N 頂点の完全グラフの辺の個数は $N(N-1)/2$ 個
- N 頂点の木の辺の個数は $N-1$ 個
- $N/2$ 個の全域木が作れる (と予想できる)
- 実際に作ってみればいい

解法 1: 帰納的に作る

- 簡単のため N が偶数の場合を考える (奇数も大体同じ)
- 頂点数 $2N$ の場合を $2N-2$ の場合から作る

解法 1: 帰納的に作る

- 簡単のため N が偶数の場合を考える (奇数も大体同じ)
- 頂点数 $2N$ の場合を $2N - 2$ の場合から作る
- 増えた頂点を $2N - 1$ と $2N$ とする
- $1 \sim 2N - 2$ の頂点を二つに分ける ($1 \sim N - 1$ と $N \sim 2N - 2$)

解法 1: 帰納法に作る 2(小さい全域木を大きくする)

- $2N-2$ 個の頂点に対して $N-1$ 個の全域木が作られていると仮定する $(1 \sim N-1$ と番号をつける$)$
- この全域木に $2N-1$ と $2N$ 番目の頂点を付け加える

解法 1: 帰納法に作る 2(小さい全域木を大きくする)

- $2N-2$ 個の頂点に対して $N-1$ 個の全域木が作られていると仮定する ($1 \sim N-1$ と番号をつける)
- この全域木に $2N-1$ と $2N$ 番目の頂点を付け加える
- i 番目の木に対して $2N-1$ と i、$2N$ と $N+i-1$ を結ぶと全域木ができる

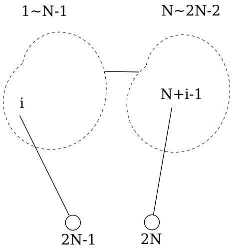

図: $2N$ と $2N-1$ を付け加える

解法 1: 帰納法に作る 3(もう一つ全域木を作る)

- これではまだ $N-1$ 個なのでもう一つ作る
- $2N-1$ と $2N$、$2N-1$ と $N \sim 2N-2$、$2N$ と $1 \sim N-1$ を結ぶと全域木ができる
- 前の全域木の作り方と比べると、同じ辺は 1 度しか使っていないことがわかる

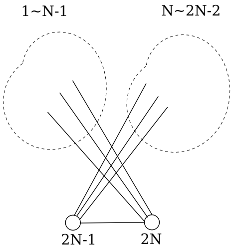

図: 新しい全域木

解法 2: 直接作る

- N 個の頂点を円周上に並べる

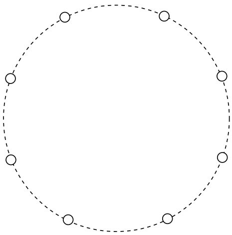

図: $N = 8$ の場合

解法 2: 直接作る

- N 個の頂点を円周上に並べる
- ある辺に直行するように直線を引く

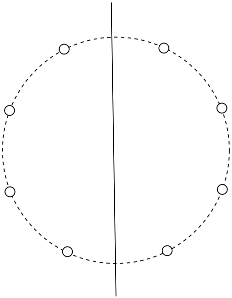

図: 直線を引く

解法 2: 直接作る

- N 個の頂点を円周上に並べる
- ある辺に直行するように直線を引く
- 引いた直線に直行する辺を使う

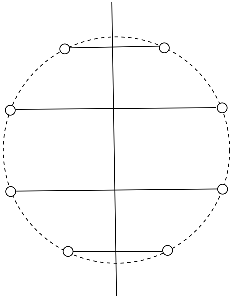

図: 直行する辺を使う

解法 2: 直接作る

- N 個の頂点を円周上に並べる
- ある辺に直行するように直線を引く
- 引いた直線に直行する辺を使う
- 少し直線を回転させて、もう一度直線に直行する辺を使う

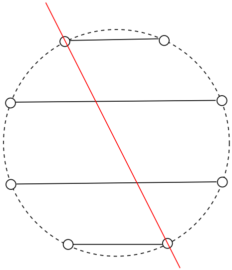

図: 直線を回転

解法 2: 直接作る

- N 個の頂点を円周上に並べる
- ある辺に直行するように直線を引く
- 引いた直線に直行する辺を使う
- 少し直線を回転させて、もう一度直線に直行する辺を使う

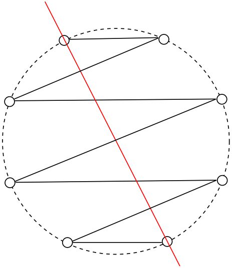

図: 直行する辺を使う

解法 2: 直接作る

- N 個の頂点を円周上に並べる
- ある辺に直行するように直線を引く
- 引いた直線に直行する辺を使う
- 少し直線を回転させて、もう一度直線に直行する辺を使う
- 以下回転させながら同じ

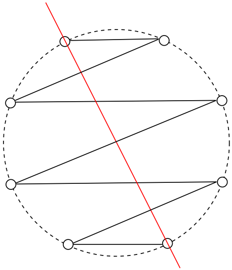

図: 直行する辺を使う

結果

- First accepted: **69**min (OgieKako)
- Number of accepted: **12**