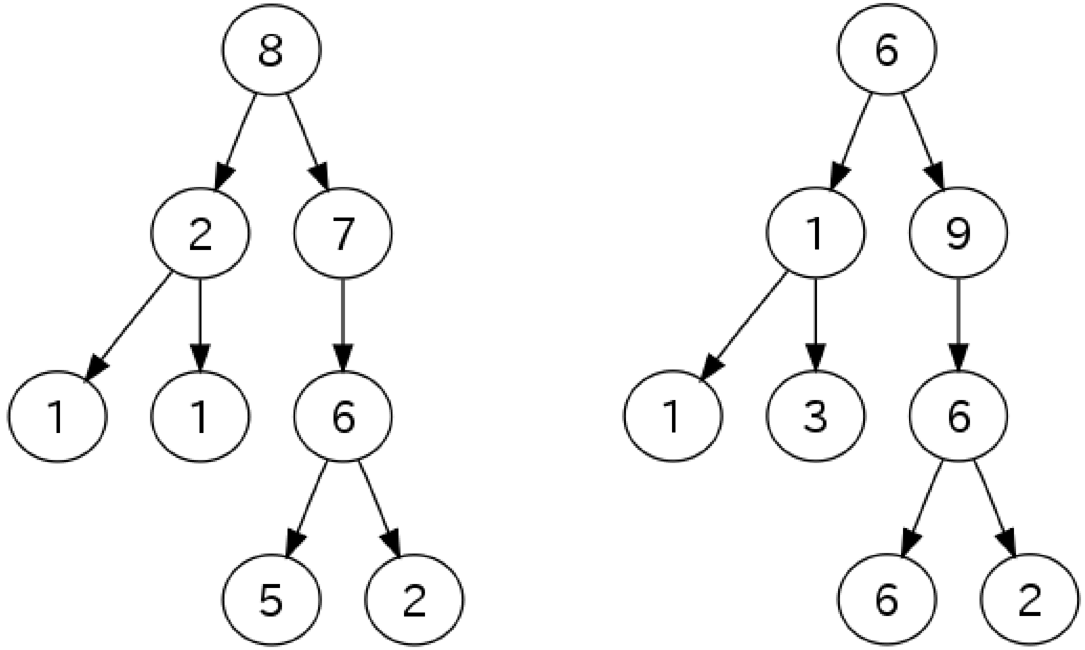
2012/12/02 ディー・エヌ・エー 渋谷オフィス

東京大学プログラミングコンテスト 2012 問題 L
じょうしょうツリー

問題作成・解説：

秋葉 拓哉 (iwiwi)

問題



- 与えられた木を「じょうしょう木」にする最小コスト
- じょうしょう木 = 親は子よりも大きい木

部分点解法 (50 点)

標準的な木 DP

状態は (頂点，親の数字)

前処理

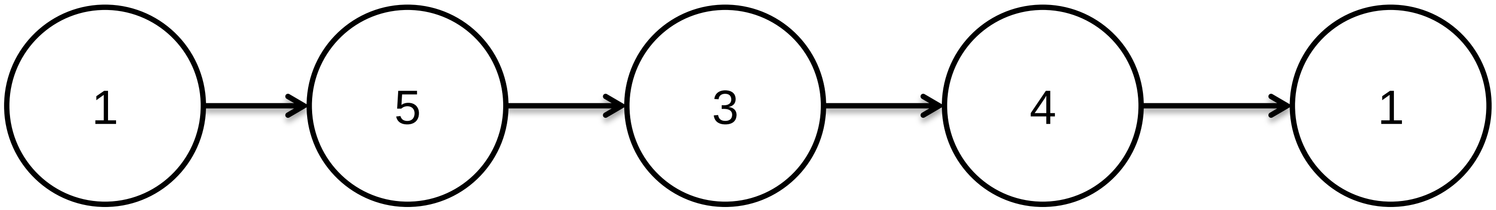
「より大きい」より「以上」のほうが考えやすいので，「以上」に問題を変換する

- $C_v \to C_v - \mathrm{depth}(v)$ とすればよい
- 例：5-5-5-5 → 5-4-3-2

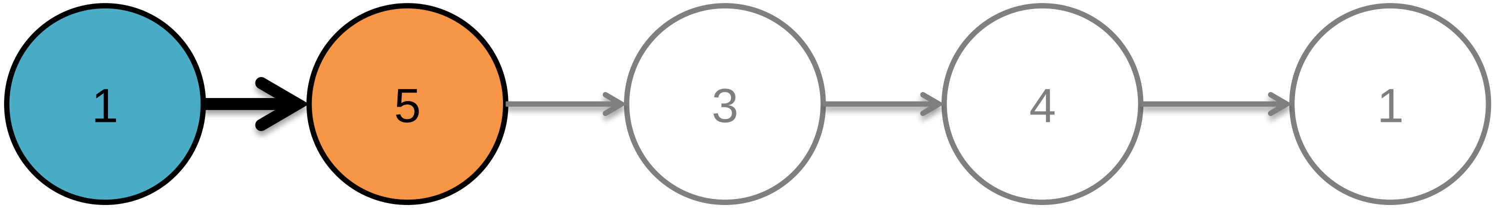
列版

まずは列バージョンを解いてみよう

（列が解けなければましてや木をや）

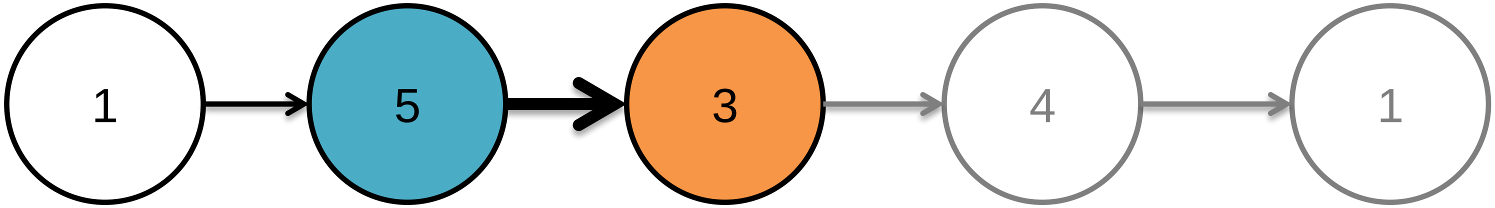


列版



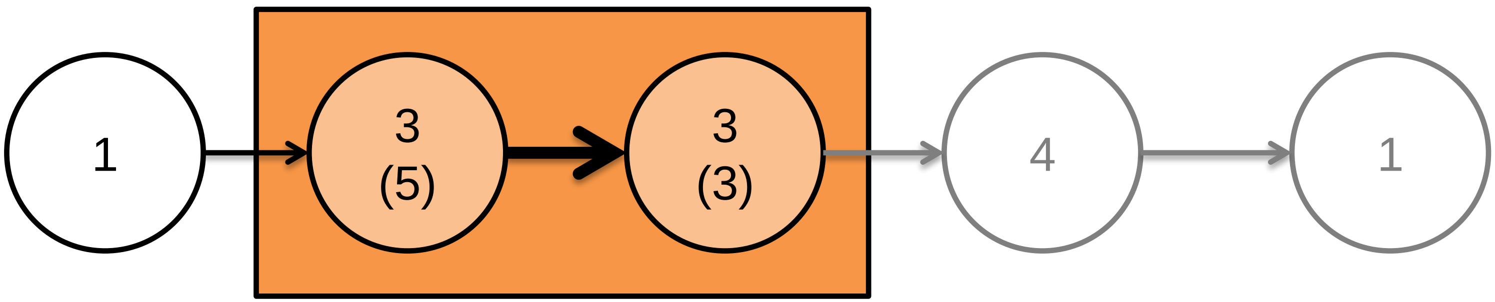
OK

列版



NG!

列版

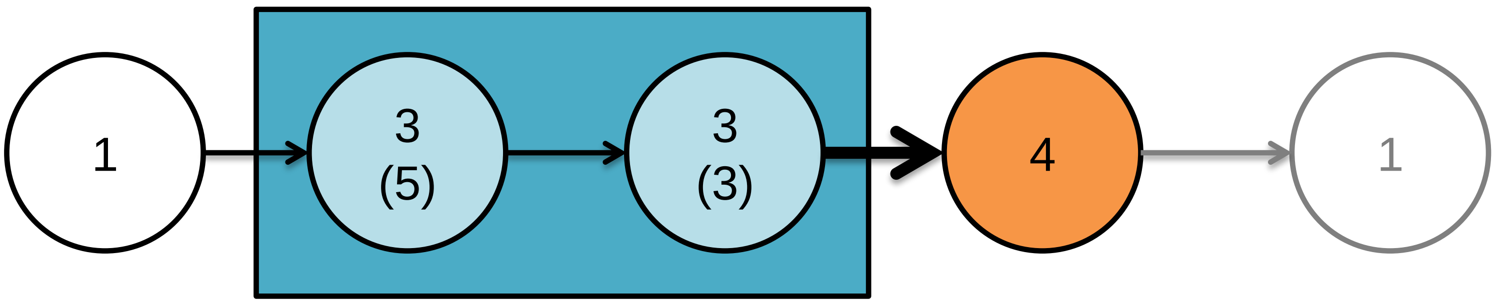


Merge!

グループにして，**中間値**にする

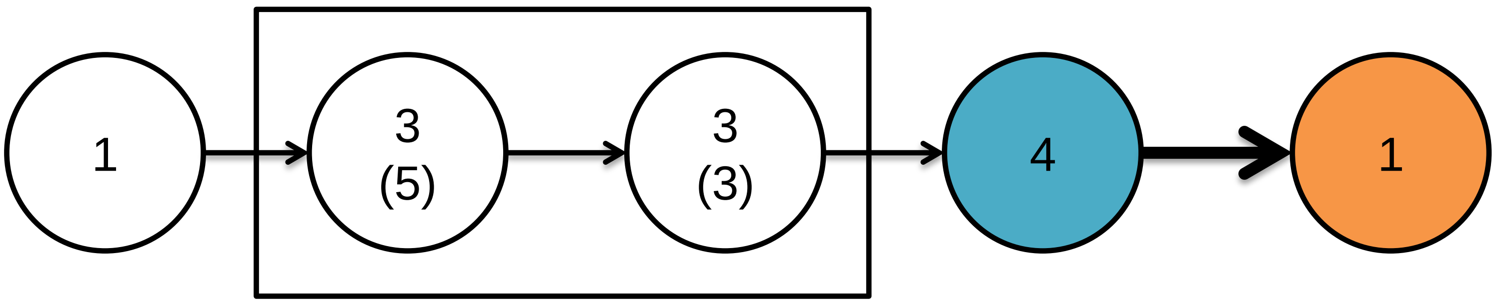
(この場合 2 つなので，3, 4, 5 どれでも)

列版



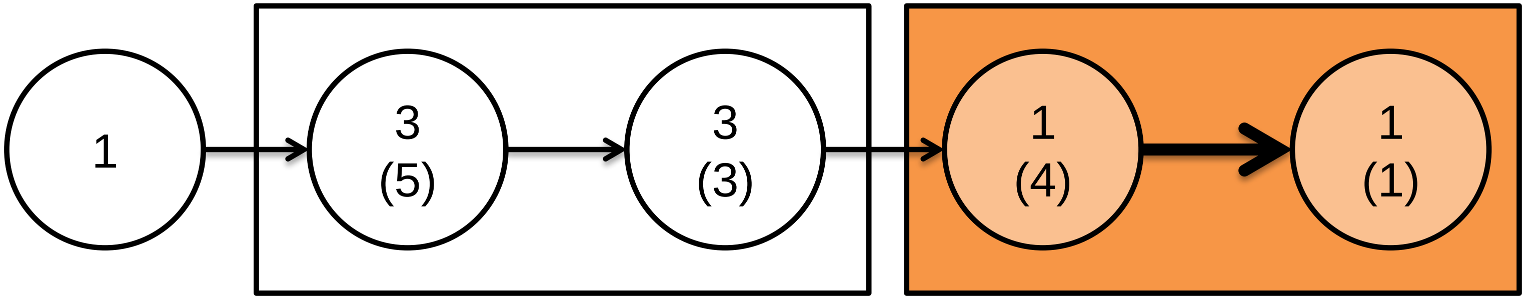
OK

列版



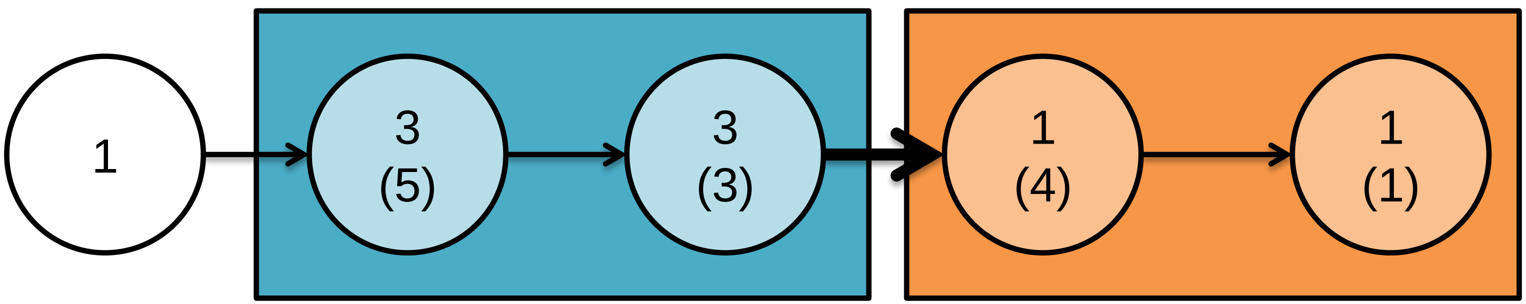
NG!

列版



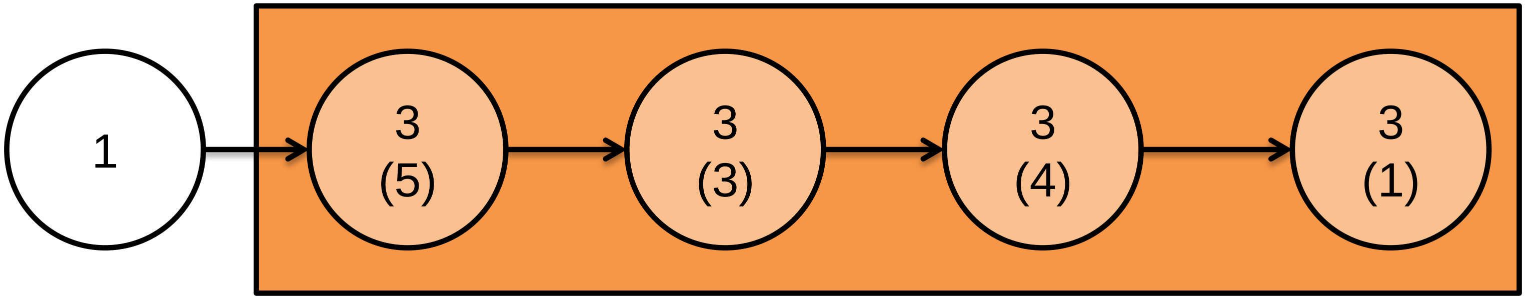
Merge!

列版



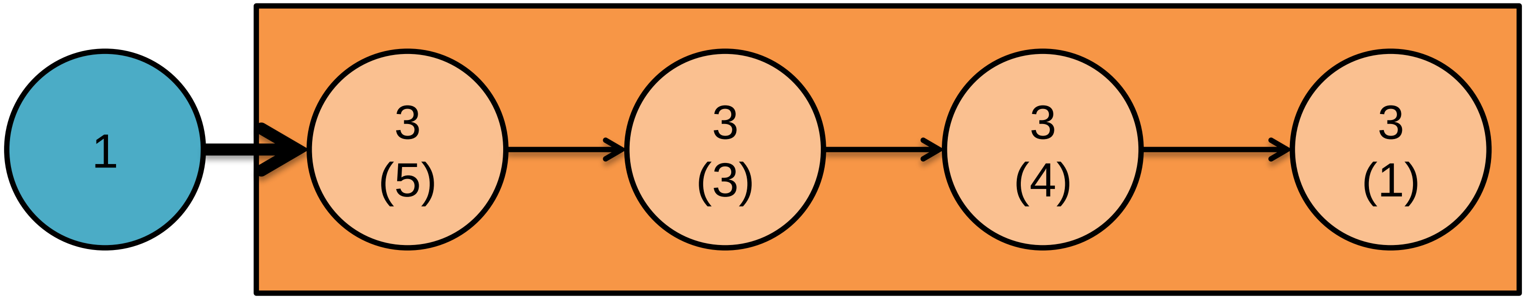
まだ NG!

列版



また Merge！

列版



OK!

列版

末尾から見ていき，順序がおかしかったら**マージ**,
中間値に揃える

$O(n^2)$？ 高速に行うには？

- 集合のマージ
- 中間値の取得

がやりたい

列版

末尾から見ていき，順序がおかしかったら**マージ**，中間値に揃える

$O(n^2)$？ 高速に行うには？

- 集合のマージ
- 中間値の取得

がやりたい

→ Meldable Heap!!

Meldable Heap？

- 追加
- 最小値 (最大値) の取得・削除
- **併合** (*meld*)

ができるデータ構造

- 実はかなり楽に実装できる
  - Skew Heap，Leftist Tree
- まぁ知らなくても ならし $O(\log^2 n)$ でできます
  - 小さい方を大きい方に全部追加すればいい

中間値？

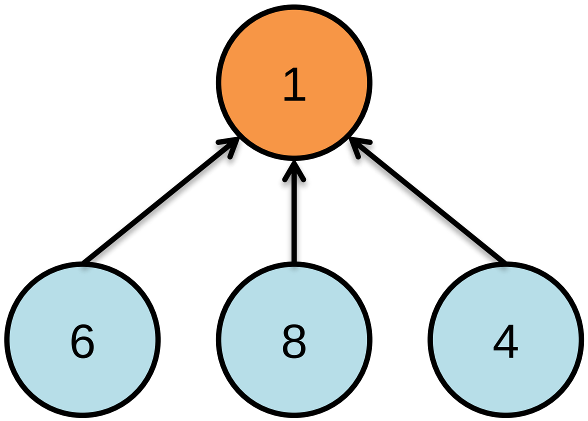
- 小さい方 $\frac{n}{2}$ 個ぐらいをヒープに入れておけば，
最大値が中間値

木版

基本的には同様に葉からやれば良い

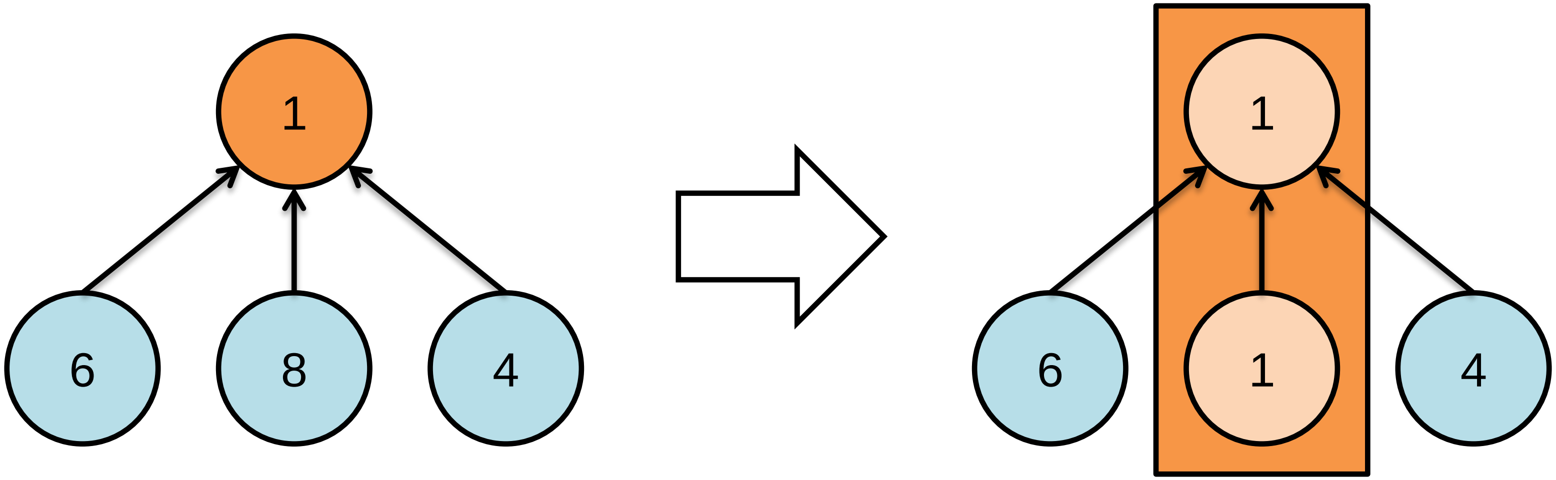
つまり，あるノードを処理するとき，各子ノード以下の部分木は全てじょうしょうツリーになっているようにする

木版



どれを Merge すればよい？

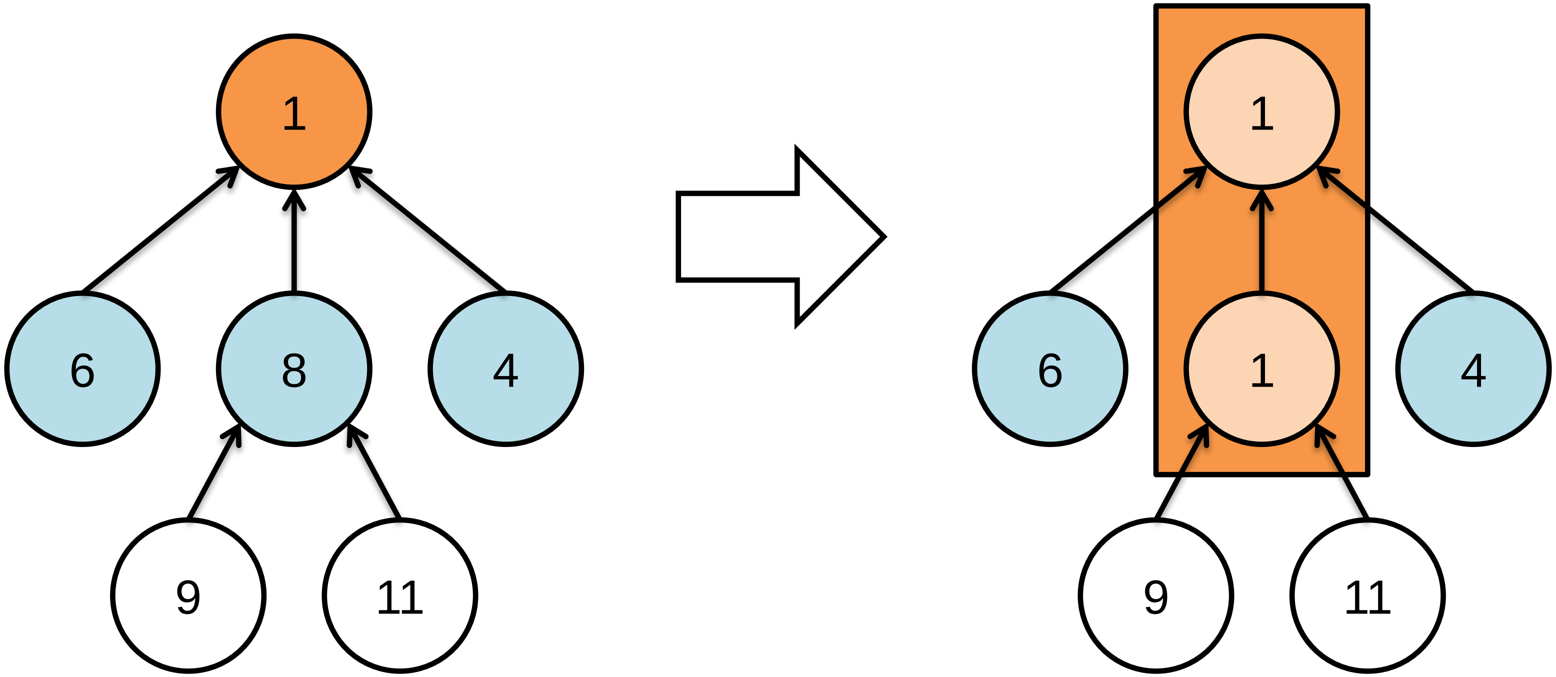
木版



一番大きいやつ！

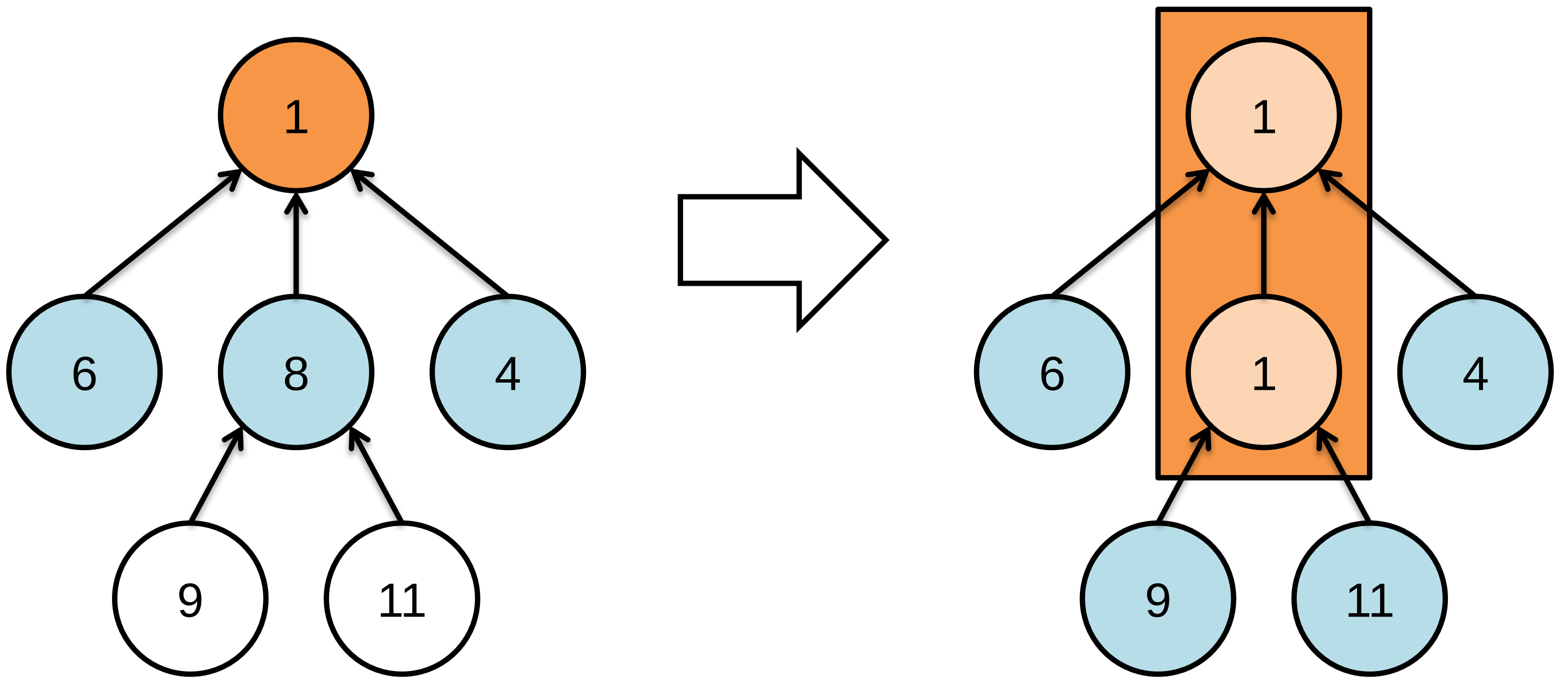
（→高速に取得するために最大の子を爆速で取得できるよう管理しよう）

木版



おや？子供の子供が…

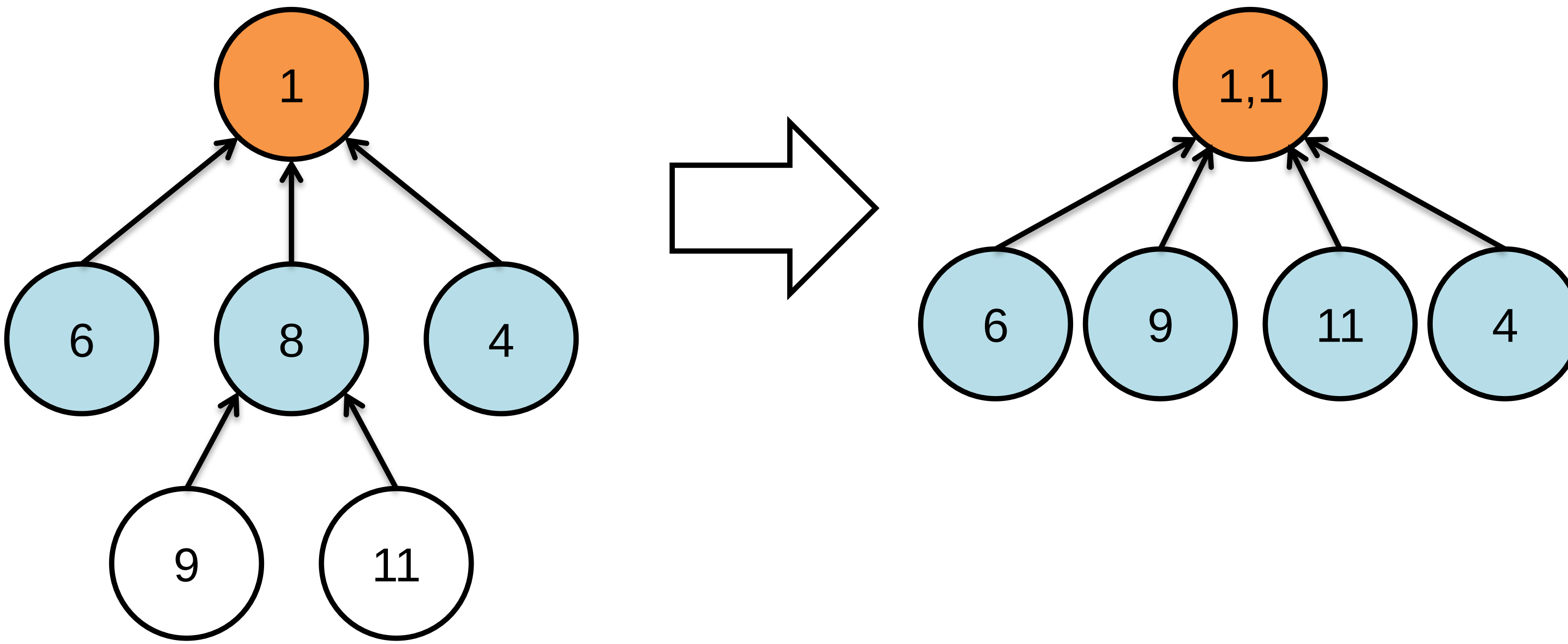
木版



おや？子供の子供が…

子供に！？

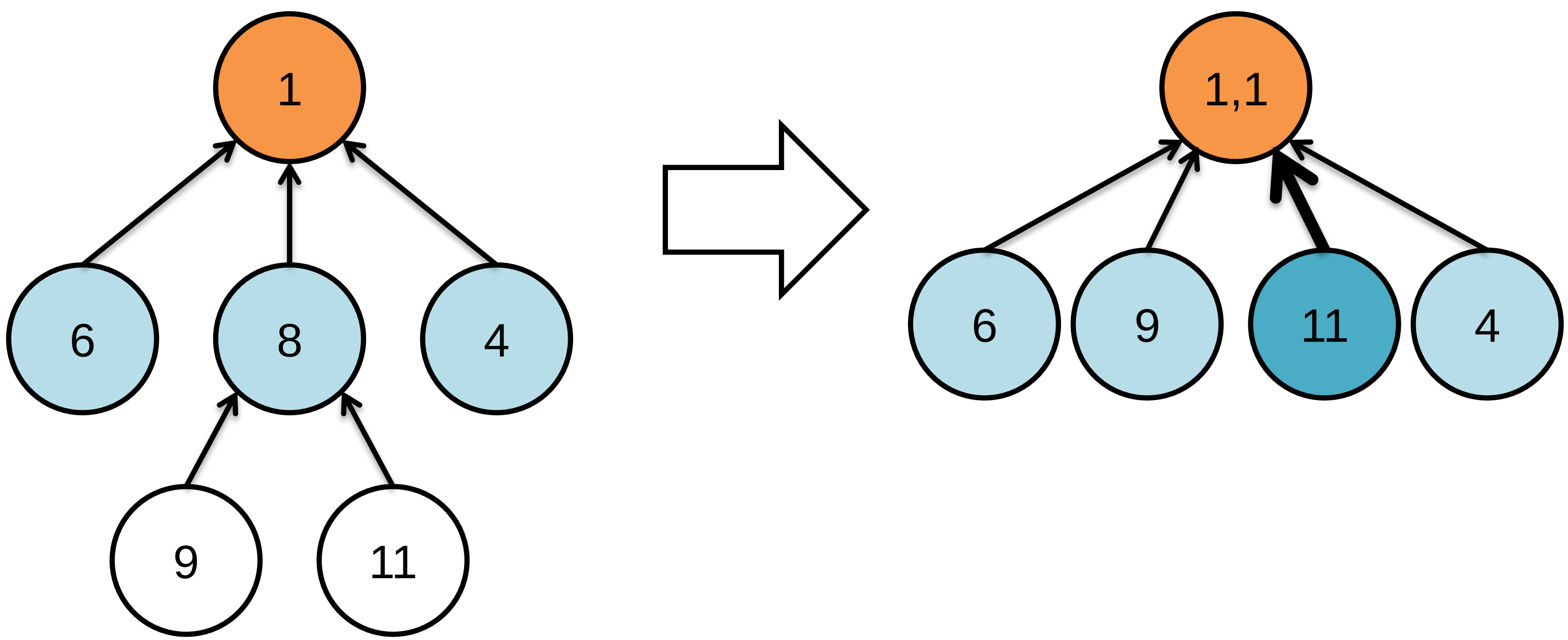
木版



あるいは木の辺が**縮約 (contract)** される

と考えてもよい

木版



増えた子も含めて，また**最大の子**が取得したい

→ つまり，最大を取得/削除＋併合がしたい…

木版

また

Meldable Heap

だー！！！！

子のリストも Meldable Heap で管理！

木版

これで全体 $O(n \log n)$

トリッキーなアルゴリズムだが，実装はかなり楽

meldable heap さえあれば，重要な処理は 20 行くらい？

meldable heap も Skew Heap 等は実装が軽いし

別解 (by 岩田)

- LP で書いてみる

（ノードiの新しい値をx_iとした）

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \; & \sum_i d_i^+ + d_i^- \\
\text{subject to} \; & x_i \geq x_j (j \in \text{child}(i)) \\
& x_i - C_i \leq d_i^+ \\
& C_i - x_i \leq d_i^- \\
& d_i^+, d_i^- \geq 0
\end{aligned}
$$

別解 (by 岩田)

- この LP は完全ユニモジュラなので整数解が求まる
- 具体的には以下のようなグラフの最小費用循環流の双対
  - 始点 s を追加
  - 親から子に容量無限，コスト 0 の辺を張る
  - s から各点 i に，容量 1，コストC_iの辺を張る
  - 各点 i から s に，容量 1，コスト$-C_i$の辺を張

- ただし，普通に最小費用循環流を求めては TLE
- この問題の最小費用流を求める専用アルゴリズムを作る
  - $O(n \log n)$ にできる（この路線でも，meldable heap を使う）

解答状況

- AC
  1. おねーちゃん (154:23)
  2. UnagiTaberuPerorinCoders (178:38)

- Accepted : 2
- Submitted : 20